

1.8.2 Násobení mnohočlenů

Předpoklady: 010801

Pedagogická poznámka: Neříkám žákům, jaký je správný postup. To, že většina z nich prohlásí za správnou druhou možnost (tu správnou) s tím, že jim to už říkali ve škole, mně nestačí (ani já jim nemusím říkat pravdu). Po čase určitě někdo přijde s dosazením, využití geometrie je vzácnější.

Př. 1: U výpočtu součinu mnohočlenů například $(2x+3)(x^2+2)$ se objevují dva výsledky:

a) $(2x+3)(x^2+2) = 2x \cdot x^2 + 3 \cdot 2 = 2x^3 + 6,$

b) $(2x+3)(x^2+2) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 2 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2 = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 6.$

Najdi způsob, jak rozhodnout, který z nich je správný.

Vyzkoušíme oba postupy s konkrétními čísly, například pro $x = 1$.

- $(2x+3)(x^2+2) = 2x^3 + 6 = 2 \cdot 1^3 + 6 = 8$

- $(2x+3)(x^2+2) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 6 = 15$

Správný výsledek určíme dosazením do původního výrazu:

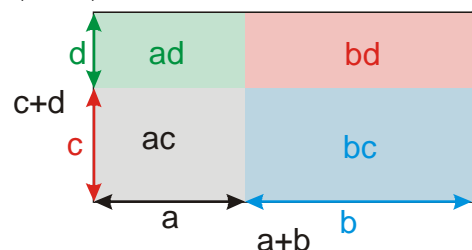
$$(2x+3)(x^2+2) = (2 \cdot 1 + 3)(1^2 + 2) = 5 \cdot 3 = 15.$$

V příkladu jsme dokázali, že první postup je špatný, ale ne, že druhý je správný.

Přesvědčivější může být geometrie.

$(2x+3)(x^2+2)$ si přepíšeme jako $(a+b)(c+d)$, pořád jde o součin dvou součtů dvou čísel $(a+b)$ a $(c+d)$. Jaký je význam součinu dvou čísel?

Součin dvou čísel $(a+b)(c+d)$ interpretujeme jako obsah obdélníka o stranách $(a+b)$ a $(c+d)$.



Pro obsah obdélníku platí:

- $S = (a+b)(c+d),$

- $S = ac + ad + bc + bd,$

$$\Rightarrow (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Postup můžeme zobecnit i pro větší počet činitelů nebo více čísel v jednotlivých závorkách.

Součin mnohočlenů

Mnohočleny vynásobíme tak, že vynásobíme každý člen prvního mnohočlenu každým členem druhého mnohočlenu a výsledné členy pak sečteme.

Př. 2: Urči součin mnohočlenů $x+1$ a $3x^2-2$.

$$(x+1)(3x^2-2) = x \cdot 3x^2 + x \cdot (-2) + 1 \cdot 3x^2 + 1 \cdot (-2) = 3x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

Pedagogická poznámka: Pokud někdo počítá rovnou (a správně), samozřejmě ho nenutím, aby součiny rozepisoval.

Př. 3: Urči součin mnohočlenů x^2-2x a $xy-2x+1$.

$$\begin{aligned}(x^2-2x) \cdot (xy-2x+1) &= x^2 \cdot xy + x^2(-2x) + x^2 \cdot 1 - 2x(xy) - 2x(-2x) - 2x \cdot 1 = \\ &= x^3y - 2x^3 + x^2 - 2x^2y + 4x^2 - 2x = x^3y - 2x^3 - 2x^2y + 5x^2 - 2x\end{aligned}$$

V dalších příkladech už budeme zkracovat zápis.

Př. 4: Spočti $(2x-3)^2$.

$$(2x-3)^2 = (2x-3)(2x-3) = 4x^2 - 6x - 6x + 9 = 4x^2 - 12x + 9$$

Př. 5: Zjednoduš $(x+2)^2 - (x+1)(x-3)$.

$$(x+2)^2 - (x+1)(x-3) = x^2 + 2x + 2x + 4 - (x^2 - 3x + x - 3) =$$

Znaménko mínus patří ke všem členům, které vzniknou roznásobením druhé dvojice závorek.

$$= x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 2x - 3) = 6x + 7$$

Pedagogická poznámka: Většina chyb v předchozím příkladu vyplývá z vynechání závorky za znaménkem mínus.

Př. 6: Spočti $(5-2x)^3$.

$$(5-2x)^3 = (5-2x)(5-2x)(5-2x) = (25-10x-10x+4x^2)(5-2x) =$$

$$= (25-20x+4x^2)(5-2x) = 125-50x-100x+40x^2+20x^2-8x^3 =$$

$$-8x^3+60x^2-150x+125$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je opět možné pojmut jako ukázkou postupného řešení. Studenti musí nejprve vynásobit první dvě závorky mezi sebou a pak teprve vzniklý (zjednodušený!!) výsledek s poslední závorkou.

Př. 7: Výraz $a^2 - bc$ vyjádři jako mnohočlen, jestliže platí $a = 2x + 1$, $b = 1 - 3x$,
 $c = 4 + 2x$.

$$\begin{aligned} a^2 - bc &= (2x + 1)^2 - (1 - 3x)(4 + 2x) = (4x^2 + 2x + 2x + 1) - (4 + 2x - 12x - 6x^2) = \\ &= (4x^2 + 4x + 1) - (4 - 10x - 6x^2) = 4x^2 + 4x + 1 - 4 + 10x + 6x^2 = 10x^2 + 14x - 3 \end{aligned}$$

Př. 8: Sběrka příklad 1.

Př. 9: Urči, o kolik se zvětší hodnota výrazu $(x + 2)(x^2 - x - 3)$, když se x zvětší o 2.

O kolik se zvětší hodnota = nová hodnota - stará hodnota.

Spočítáme starou hodnotu:

$$\begin{aligned} (x + 2)(x^2 - x - 3) &= x(x^2) + x(-x) + x \cdot (-3) + 2x^2 + 2(-x) + 2 \cdot (-3) = \\ x^3 - x^2 - 3x + 2x^2 - 2x - 6 &= x^3 + x^2 - 5x - 6 \end{aligned}$$

Nová hodnota: místo x dosadíme do výrazů $(x + 2)$:

$$\begin{aligned} [(x + 2) + 2][(x + 2)^2 - (x + 2) - 3] &= (x + 4)(x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 3) = \\ (x + 4)(x^2 + 3x - 1) &= x(x^2) + x(3x) + x \cdot (-1) + 4x^2 + 4(3x) + 4 \cdot (-1) = \\ x^3 + 3x^2 - x + 4x^2 + 12x - 4 &= x^3 + 7x^2 + 11x - 4 \end{aligned}$$

Odečteme obě hodnoty: nová - stará =

$$\begin{aligned} x^3 + 7x^2 + 11x - 4 - (x^3 + x^2 - 5x - 6) &= x^3 + 7x^2 + 11x - 4 - x^3 - x^2 + 5x + 6 = \\ 6x^2 + 16x + 2 \end{aligned}$$

Hodnota výrazu se zvětšila o výraz $6x^2 + 16x + 2$.

Dodatek: Novou hodnotu výrazu můžeme získat (a je to vzhledem ke KISS asi i správnější) dosazením do upraveného tvaru: $x^3 + x^2 - 5x - 6$.

$$\begin{aligned} (x + 2)^3 + (x + 2)^2 - 5(x + 2) - 6 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^2 + 4x + 4 - 5x - 10 - 6 = \\ x^3 + 7x^2 + 11x - 4 \end{aligned}$$

A bonbónek na konec.

Př. 10: Urči součin mnohočlenů $3x^2 - xy + 2x - 2$ a $4x^2y - 2xy - x$.

$$\begin{aligned} & (3x^2 - xy + 2x - 2)(4x^2y - 2xy - x) = \\ & 3x^2(4x^2y) + 3x^2(-2xy) + 3x^2(-x) \\ & -xy(4x^2y) - xy(-2xy) - xy(-x) \\ & +2x(4x^2y) + 2x(-2xy) + 2x(-x) \\ & -2(4x^2y) - 2(-2xy) - 2(-x) = \\ & 12x^4y - 6x^3y - 3x^3 - 4x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y + 8x^3y - 4x^2y - 2x^2 - 8x^2y + 4xy + 2x = \\ & 12x^4y - 4x^3y^2 - 6x^3y + 8x^3y - 3x^3 + 2x^2y^2 + x^2y - 4x^2y - 8x^2y - 2x^2 + 4xy + 2x = \\ & 12x^4y - 4x^3y^2 + 2x^3y - 3x^3 + 2x^2y^2 - 11x^2y - 2x^2 + 4xy + 2x \end{aligned}$$

Př. 11: Sbírka příklad 2.
Sbírka příklad 3.

Shrnutí: Při násobení mnohočlenů (stejně jako při násobení závorek) postupujeme systémem každý s každým.